

ÁLGEBRA- SISTEMAS POR EL MÉTODO DE GAUSS

FICHA 2

Discute mediante el método de Gauss los siguientes sistemas, según el valor del parámetro a y resuélvelos cuando sea posible:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 11y + 9z = a \\ x - 3y + 5z = 2 \\ 3x - 7y + 7z = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + y - az = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} ax + (a+1)y = 2 \\ (a+1)x + ay = 6 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + ay = 1 \\ 3x - y = 2 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$$

SOLUCIONES

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 5x - 11y + 9z = a \\ x - 3y + 5z = 2 \\ 3x - 7y + 7z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 3 & -7 & 7 & 3 \\ 5 & -11 & 9 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 5F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 4 & -16 & a-10 \end{pmatrix} \rightarrow \\
 & \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix} \rightarrow a-4=0 \Rightarrow a=4
 \end{aligned}$$

Si $a = 4$ sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 2 \\ 2y - 8z = -3 \end{cases} \rightarrow \text{haciendo } z = t \rightarrow \text{sol} \begin{cases} x = -\frac{5}{2} + 7t \\ y = -\frac{3}{2} + 4t \\ z = t \end{cases}$$

Si $a \neq 4$ sistema incompatible

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + y - az = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -a & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1-a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\
 & \xrightarrow{3F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3-3a & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2-3a & 5 \end{pmatrix} \rightarrow 2-3a=0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Si $a = \frac{2}{3}$ sistema INCOMPATIBLE

$$\begin{aligned}
 & \text{Si } a \neq \frac{2}{3} \text{ sistema COMPATIBLE DETERMINADO } \text{Sol} \begin{cases} x = \frac{1+a}{2-3a} \\ y = \frac{3-2a}{2-3a} \\ z = \frac{5}{2-3a} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$c) \begin{cases} ax + (a+1)y = 2 \\ (a+1)x + ay = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} a & a+1 & 2 \\ a+1 & a & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} a & a+1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ a & a+1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - aF_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2a+1 & 2-4a \end{pmatrix} \rightarrow 2a+1=0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Si $a = -\frac{1}{2}$ sistema INCOMPATIBLE, quedaría $\begin{cases} x - y = 4 \\ 0y = 4 \end{cases}$

Si $a \neq -\frac{1}{2}$ sistema COMPATIBLE DETERMINADO, quedaría $\begin{cases} x - y = 4 \\ (2a+1)y = 2-4a \end{cases}$

$$\rightarrow y = \frac{2-4a}{2a+1} \Rightarrow x = 4 + \frac{2-4a}{2a+1} = \frac{4a+6}{2a+1}$$

$$d) \begin{cases} x + ay = 1 \\ 3x - y = 2 \\ x - 5y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 - 3F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 14 & 2 \\ 0 & a+5 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $a = -5$ SISTEMA INCOMPATIBLE

Si $a \neq -5$ quedaría: $\begin{cases} x - 5y = 0 \\ 14y = 2 \\ (a+5)y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5y \\ 14(a+5)y = 2(a+5) \\ -14(a+5)y = -14 \end{cases} \Rightarrow 0y = 2a-4$

Si $a = 2$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

$$x = \frac{5}{7}; y = \frac{1}{7}$$

Si $a \neq -5$ y $a \neq 2$ SISTEMA INCOMPATIBLE